Inspectoratul Şcolar Judeţean
Harghita

Olimpiada de matematică – clasa a XII-a
etapa zonală – 11 februarie 2012

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$4^{x+\frac{1}{x}} + 9^{x+\frac{1}{x}} = 275$$

2. Fie mulţimea $G = \left\{ f_m \mid f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_m(x) = \ln\left(\left(1 + e^x\right)^m - 1\right), m > 0 \right\}$. Să se arate că $(G, \circ)$ este grup abelian, unde operaţia ” $\circ$ ” reprezintă compunerea funcţiilor.

3. Se dă $\mathbf{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \middle| a + b + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Arătaţi că:

a) **M** este parte stabilă a lui $M_3(\mathbf{R})$ în raport cu înmulţirea matricilor;
b) $(\mathbf{M},\cdot)$ este monoid comutativ;
c) Determinaţi elementele inversabile ale monoidului.

4. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit primitive $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea $f(2012 - x) \cdot F(x - 2012) = 2012 - x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7

Csapó Hajnalka, Páll Olga, Tamási Csaba